

解得 $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$, 所以函数 $f(x) - g(x)$ 的定义域是 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

(2) 函数 $f(x) - g(x)$ 是奇函数, 理由如下:

由(1)知函数 $f(x) - g(x)$ 的定义域关于原点对称, $\therefore f(-x) - g(-x) = \log_a(3-2x) - \log_a(3+2x) = -[\log_a(3+2x) - \log_a(3-2x)] = -[f(x) - g(x)]$, \therefore 函数 $f(x) - g(x)$ 是奇函数.

(3) 若 $f(x) - g(x) > 0$, 则 $\log_a(3+2x) > \log_a(3-2x)$.

当 $a > 1$ 时, 有 $3+2x > 3-2x$, 解得 $x > 0$, 由(1)可得此时 x 的取值范围是 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$;

当 $0 < a < 1$ 时, 有 $3+2x < 3-2x$, 解得 $x < 0$, 由(1)可得此时 x 的取值范围是 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

综上, 当 $a > 1$ 时, x 的取值范围是 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$; 当 $0 < a < 1$ 时, x 的取值范围是 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

17. 【解】(1) \because 函数 $f(x) = \lg\left(\frac{1-mx}{1-x}\right)$ 为奇函数, $\therefore f(-x) = -f(x)$ 在定义域内恒成立, 即 $\lg\left(\frac{1+mx}{1+x}\right) = -\lg\left(\frac{1-mx}{1-x}\right)$, $\lg\left(\frac{1+mx}{1+x}\right) + \lg\left(\frac{1-mx}{1-x}\right) = 0$, 则 $\frac{1+mx}{1+x} \cdot \frac{1-mx}{1-x} = 1$, 即 $1-m^2x^2 = 1-x^2$ 在定义域内恒成立, $\therefore m = -1$ 或 $m = 1$. 当 $m = 1$ 时, $f(x) = \lg\left(\frac{1-mx}{1-x}\right) = \lg\frac{1-x}{1-x}$, $1-x \neq 0$, 即 $x \neq 1$, 即函数的定义域关于原点对称, 不满足条件, 舍去; 当 $m = -1$ 时, $f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$, 由

$\frac{1+x}{1-x} > 0$, 解得 $-1 < x < 1$, 故 $m = -1$,

且函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1, 1)$.

(2) 函数 $f(x)$ 是增函数, 理由如下:

$\because f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$, $-1 < x < 1$, 任取

$-1 < x_1 < x_2 < 1$, 设 $u(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $-1 <$

$x < 1$, 则 $u(x_1) - u(x_2) = \frac{1+x_1}{1-x_1} -$

$\frac{1+x_2}{1-x_2} = \frac{2(x_1-x_2)}{(1-x_1)(1-x_2)}$. $\because -1 <$

$x_1 < x_2 < 1$, $\therefore u(x_1) - u(x_2) < 0$,

$\therefore u(x_1) < u(x_2)$, 即 $\lg[u(x_1)] < \lg[u(x_2)]$, $\therefore f(x_1) < f(x_2)$, 即 $f(x)$ 在定义域内单调递增.

18. 【解】(1) $\because f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $\therefore ax^2 + (a+1)x + a+1 > 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立.

当 $a = 0$ 时, $x+1 > 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 不恒成立, 舍去;

当 $a \neq 0$ 时, $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta = (a+1)^2 - 4a(a+1) < 0, \end{cases}$ 解得 $a > \frac{1}{3}$.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

(2) 设 $g(x) = ax^2 + (a+1)x + a+1$, $\therefore f(x)$ 的定义域为 $[a+1, 2(a+1)]$, $\therefore g(x) > 0$ 在 $[a+1, 2(a+1)]$ 上恒成立,

当 $a = 0$ 时, $g(x) = x+1 > 0$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立, 满足题意;

当 $a > 0$ 时, $g(x)$ 的图象开口向上, 对称轴为直线 $x = -\frac{a+1}{2a} < 0$,

$g(x)$ 在 $[a+1, 2(a+1)]$ 上单调递

增, $\therefore g(a+1) = a(a+1)^2 + (a+1)(a+1) + a+1 = (a+1)(a^2 + 2a + 2) > 0$ 恒成立, $\therefore a > 0$ 满足题意;

当 $a < 0$ 时, $g(x)$ 的图象开口向下, $g(x) > 0$ 在 $[a+1, 2(a+1)]$ 上

恒成立, 则 $\begin{cases} g(a+1) > 0, \\ g[2(a+1)] > 0, \end{cases}$ $g(a+1) = (a+1)(a^2 + 2a + 2) > 0$, $\therefore a^2 + 2a + 2 > 0$ 恒成立, $\therefore -1 < a < 0$; $g[2(a+1)] = (a+1)(4a^2 + 6a + 3) > 0$, $\therefore 4a^2 + 6a + 3 > 0$ 恒成立, $\therefore -1 < a < 0$.

综上所述, a 的取值范围为 $(-1, +\infty)$.

985 冲刺专题七 幂指对函数综合问题

1. D 【解析】 $y = x^3$ 是奇函数, 故 A 错误;

$y = \ln \frac{1}{x}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 是非奇非偶函数, 故 B 错误;

$y = 2^x$ 是非奇非偶函数, 故 C 错误; $y = x^2$ 是偶函数, 且在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 D 正确.

2. C 【解析】函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \log_2(2-x), & x < 1, \\ 2^{x-1}, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 $f(-2) = 1 +$

$\log_2(2+2) = 1 + 2 = 3$, $f(\log_2 12) = 2^{\log_2 12 - 1} = 2^{\log_2 12} \times \frac{1}{2} = 12 \times \frac{1}{2} = 6$, 所以

$f(-2) + f(\log_2 12) = 3 + 6 = 9$. 故 C 正确.

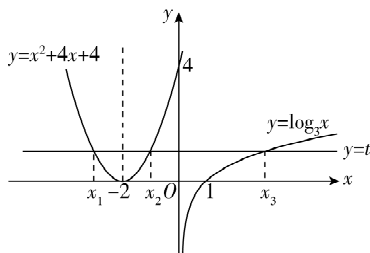
3. D 【解析】 $\because y = x^{0.8}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 且 $3.6 > 2.4 > 1$, $\therefore 3.6^{0.8} > 2.4^{0.8} > 1$. $\therefore \log_{0.3} 4.2 < \log_{0.3} 1 = 0 = \log_{0.4} 1 < \log_{0.4} 0.5 < \log_{0.4} 0.4 = 1$, $\therefore \log_{0.3} 4.2 < 0 < \log_{0.4} 0.5 < 1$, $\therefore b > a > d > c$. 故 D 正确.

4. B 【解析】因为函数 $f(x) = \frac{2^{x+1}x^3}{4^x+1} = \frac{2x^3}{2^x+2^{-x}}$, 定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(-x) = \frac{-2x^3}{2^{-x}+2^x} = -\frac{2x^3}{2^x+2^{-x}} = -f(x)$, 所以函数为奇函数, 故 C 错误; 由于 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, 故 D 错误; 再根据 AB 选项, 考虑特殊值 $f(4) = \frac{2^5 \times 4^3}{4^4+1} = \frac{8 \times 4^4 + 8 - 8}{4^4+1} = 8 -$

$\frac{8}{4^4+1} \approx 8$, 故 A 错误, B 正确.

5. (0, 4) 【解析】 $\because 2^0 = 1, \log_a 1 = 0$,
 $\therefore x = 0$ 时, $y = 2^0 + \log_a(0+1) + 3 = 1 + 0 + 3 = 4$, 故 $y = 2^x + \log_a(x+1) + 3$
 的图象恒过定点 (0, 4).

6. (-3, 77] 【解析】设 $x_1 < x_2 < x_3$,
 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = t$, 由图象可知,
 当 $0 < t \leq 4$ 时, 直线 $y = t$ 与函数
 $y = f(x)$ 图象的三个交点的横坐标
 分别为 x_1, x_2, x_3 , 二次函数 $y = x^2 + 4x + 4$
 的图象关于直线 $x = -2$ 对称, 则 $x_1 + x_2 = -4$, 由于
 $0 < f(x_3) \leq 4$, 即 $0 < \log_3 x_3 \leq 4$, 得 $1 < x_3 \leq 81$,
 解得 $-3 < x_1 + x_2 + x_3 \leq 77$. 因此 $x_1 + x_2 + x_3$
 的取值范围是 $(-3, 77]$.



7. 1 【解析】直线 $y = 1$ 与函数
 $f(x) = 2^x + x$ 的图象交点的横坐标,
 即为方程 $2^x + x = 1$ 的解, 等价于方
 程 $2^x = 1 - x$ 的解, 等价于函数 $y = 2^x$
 与 $y = 1 - x$ 的图象交点的横

坐标;

同理, 直线 $y = 1$ 与函数 $g(x) = \log_2 x + x$
 的图象交点的横坐标, 即为方程 $\log_2 x + x = 1$
 的解, 等价于方程 $\log_2 x = 1 - x$ 的解, 等价于函数
 $y = \log_2 x$ 与 $y = 1 - x$ 的图象交点的横坐标.

因为函数 $y = 2^x$ 与 $y = \log_2 x$ 互为反函数,
 图象关于直线 $y = x$ 对称, 所以函数 $y = 2^x$
 与 $y = 1 - x$ 图象的交点坐标为 (0, 1), 函数
 $y = \log_2 x$ 与 $y = 1 - x$ 的图象交点坐标为 (1, 0),
 即 $x_1 = 0, x_2 = 1$, 所以 $x_1 + x_2 = 1$.

8. 【解】(1) 因为函数 $f(x) = \ln(x+a)$
 ($a \in \mathbf{R}$) 的图象过点 (1, 0), 所以
 $\ln(1+a) = 0$, 解得 $a = 0$, 所以函数
 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = \ln x$.

(2) 由 (1) 可知 $\ln x + \ln(2x-k) = \ln(2x^2 - kx) = 0$,
 $x \in (1, 2)$, 所以方程 $2x^2 - kx - 1 = 0$ 在 (1, 2) 上有实数根,
 设 $h(x) = 2x^2 - kx - 1$, 因为 $h(x)$ 的
 图象过点 (0, -1), 由图象可得

$$\begin{cases} h(1) = 1 - k < 0, \\ h(2) = 7 - 2k > 0, \end{cases} \text{ 解得 } 1 < k < \frac{7}{2}, \text{ 因}$$

为 $k \in \mathbf{Z}$, 所以 k 的值为 2 或 3.

(3) 因为 $m > 0$ 且 $m > \frac{1}{m}$, 所以 $m > 1$

且 $0 < \frac{1}{m} < 1$, 因为 $g(x) = x^2 - 2e^{f(x)} = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$, 所以 $g(x)$ 的最
 大值可能是 $g(m)$ 或 $g\left(\frac{1}{m}\right)$, 因为

最大值可能是 $g(m)$ 或 $g\left(\frac{1}{m}\right)$, 因为

$$g(m) - g\left(\frac{1}{m}\right) = m^2 - 2m - \left(\frac{1}{m^2} - \frac{2}{m}\right) = m^2 - \frac{1}{m^2} - \left(2m - \frac{2}{m}\right) =$$

$$\left(\frac{1}{m^2} - \frac{2}{m}\right) = m^2 - \frac{1}{m^2} - \left(2m - \frac{2}{m}\right) =$$

$$\left(m - \frac{1}{m}\right)\left(m + \frac{1}{m} - 2\right) = \left(m - \frac{1}{m}\right) \cdot$$

$$\frac{(m-1)^2}{m} > 0, \text{ 所以 } g(x)_{\max} =$$

$$g(m) = m^2 - 2m. \text{ 若 } g(x) < -\ln(m-1),$$

$$\text{只需 } g(x)_{\max} < -\ln(m-1), \text{ 即 } m^2 -$$

$$2m < -\ln(m-1), \text{ 设 } h(m) = m^2 -$$

$$2m + \ln(m-1) (m > 1), h(m) \text{ 在}$$

$$(1, +\infty) \text{ 上单调递增, 又因为}$$

$$h(2) = 0, \text{ 所以 } m^2 - 2m + \ln(m-1) <$$

$$0, \text{ 即 } h(m) < h(2), \text{ 所以 } 1 < m < 2, \text{ 所}$$

$$\text{以 } m \text{ 的取值范围是 } (1, 2).$$

第四章 综合检测

1. C 【解析】 $\because y = \log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$
 上单调递增, $\therefore A = \{x \mid \log_3 x \leq 1\} =$
 $(0, 3]$, 则 $A \cap B = (0, 2]$. 故 C
 正确.

2. C 【解析】 $y = \ln e^x$ 的定义域为
 $\mathbf{R}, y = e^{\ln x}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 定
 义域不同, 不是同一个函数, 故 A
 错误;

$$y = t^{\frac{1}{2}} \text{ 的定义域为 } [0, +\infty), y = \sqrt[4]{x^2}$$

的定义域为 \mathbf{R} , 定义域不同, 不是

同一个函数, 故 B 错误;

$$y = x^0 = 1, y = \frac{1}{x^0} = 1, \text{ 这两个函数的}$$

定义域都是 $\{x \mid x \neq 0\}$, 且对应法
 则也相同, 故是同一个函数, 故 C
 正确;

$y = \log_2 x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ 的定义域
 和对应法则都不同, 不是同一个函
 数, 故 D 错误.

3. B 【解析】 $f(x) = \log_2(x+3) +$

$$\frac{1}{x+2}, \text{ 令 } \begin{cases} x+3 > 0, \\ x+2 \neq 0, \end{cases} \text{ 解得 } x > -3 \text{ 且}$$

$x \neq -2$, 故函数 $f(x)$ 的定义域为
 $(-3, -2) \cup (-2, +\infty)$. 故 B 正确.

4. B 【解析】因为 $5^a = 2$, 所以 $a =$
 $\log_5 2$, 则 $\log_5 18 = \log_5 2 + \log_5 9 =$

$$\log_5 2 + 2 \log_5 3, \text{ 所以 } \log_5 18 = a + 2b.$$

故 B 正确.

5. C 【解析】由题意, 可得

$$\lg(100X_0) = 6 \lg(1+p) + \lg X_0, \text{ 即}$$

$$\lg 10^2 + \lg X_0 = 6 \lg(1+p) + \lg X_0, \text{ 所}$$

$$\text{以 } 2 + \lg X_0 = 6 \lg(1+p) + \lg X_0, \text{ 可得}$$

$$1 + p = 10^{\frac{1}{3}} \approx 2.154, \text{ 解得 } p \approx$$

$$1.154 = 115.4\%. \text{ 故 C 正确.}$$

6. C 【解析】因为函数 $f(x) =$

$$\log_a(x^2 - ax + 1) \text{ 在 } [2, +\infty) \text{ 上单调}$$

$$\text{递增, 令 } t = x^2 - ax + 1, x \in [2,$$

$$+\infty), \text{ 由二次函数的性质可知, } t =$$

$$x^2 - ax + 1 \text{ 只可能在 } [2, +\infty) \text{ 上单}$$